Untersuchung der Kernkurven spezieller ebener Korrelationen und der damit verbundenen quadratischen Verwandtschaften.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Ambros Nuber

Assistent an der K. Technischen Hochschule zu München.

Referent:
Geh. Hofrat Prof. Dr. Ludwig Burmester.

Korreferent:
Prof. Dr. Heinrich Liebmann

Freising 1912

Druck: Dr. F. P. Datterer & Cie. (Inh. Arthur Sellier).

Untersuchung der Kernkurven spezieller ebener Korrelationen und der damit verbundenen quadratischen Verwandtschaften.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Ambros Nuber

Assistent an der K. Technischen Hochschule zu München.

Referent:
Geh. Hofrat Prof. Dr. Ludwig Burmester.

Korreferent:
Prof. Dr. Heinrich Liebmann.

Freising 1912

Druck: Dr. F. P. Datterer & Cie. (Inh. Arthur Sellier).

Dem Andenken an meine Mutter in Dankbarkeit und Liebe gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546317_0110

Einleitung.

Befinden sich zwei korrelative Felder S_1, S_2 in einer gemeinsamen Ebene, so besitzt jeder Punkt P_{12} der Ebene zwei zugeordnete Gerade p_1 und p_2 und jede Gerade g_{12} derselben zwei zugeordnete Punkte G_1 und G_2, je nachdem man den Punkt bzw. die Gerade als dem ersten oder dem zweiten Feld angehörend betrachtet.[1])

Ordnet man jedem Punkte P_{12} den Schnittpunkt Π_{12} der beiden ihm entsprechenden Geraden p_1 und p_2 zu, so sind P_{12} und Π_{12} zueinander doppelt konjugiert oder involutorisch, weil sie in bezug auf beide Felder einander entsprechen.

Dualistisch erhält man zu einer Geraden g_{12} der Ebene als doppelt konjugierte γ_{12} diejenige, welche die ihr entsprechenden Punkte G_1 und G_2 verbindet.

Bewegt sich P_{12} auf einer beliebigen Geraden g_{12}, so beschreibt der doppelt konjugierte Punkt Π_{12} eine Kurve 2. Ordnung als Erzeugnis der beiden projektiven Strahlenbüschel, deren Scheitel die Punkte G_1 und G_2 sind.

Dualistisch ergibt sich:

Dreht sich eine Gerade g_{12} um einen Punkt P_{12}, so umhüllt die doppelt konjugierte Gerade g_{12} eine Kurve 2. Ordnung als Erzeugnis der beiden projektiven Punktreihen p_1 und p_2.

Es entsteht auf diese Weise durch Zuordnung der doppelt konjugierten Punkte und Geraden eine eindeutige involutorisch quadratische Punkt- bzw. Geradenverwandtschaft.

Andrerseits bestimmen zwei korrelative Felder eine Punktreihe 2. Ordnung als den Ort derjenigen Punkte, die auf ihren entsprechenden Geraden liegen und einen Strahlenbüschel 2. Ordnung, dessen Strahlen durch ihre entsprechenden Punkte gehen. Den Ort jener Punkte wollen wir in der Folge nach Sturm[2]) als die Punktkernkurve K, den Ort jener Geraden

[1]) Reye, Geometrie der Lage, II. 1892 S. 117 u. ff.

[2]) R. Sturm, Lehre von den geom. Verwandtschaften, II. S. 75.

bzw. deren Einhüllende als die Geradenkernkurve Γ bezeichnen.

Die beiden Kernkurven sind stets zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte;[1]) sind U und V die Berührungspunkte, W der Pol der Berührungssehne w, so stellen U und $\overline{UW}$, V und $\overline{WV}$, W und $\overline{UV}$ das einzige Tripel sich involutorisch entsprechender Elemente dar. Von diesen drei Paaren liegen die Elemente der ersteren beiden ineinander, die Elemente des dritten stets reellen Paares jedoch nicht.

Die drei Punkte U, V, W sind zugleich die Fundamentalpunkte und deren Verbindungslinien die Fundamentalgeraden der obigen involutorischen quadratischen Verwandtschaft.

Die Verbindungslinien aller doppelt konjugierten Punkte bilden einen Strahlenbüschel mit W als Scheitel, die Schnittpunkte aller doppelt konjugierten Geraden erfüllen eine gerade Punktreihe, deren Träger w ist.[2])

In der vorliegenden Abhandlung sind nun diejenigen Korrelationen behandelt, die durch bestimmte Lagenveränderungen aus einer involutorischen Korrelation, also aus einer polar-reziproken Beziehung hervorgehen.

Wir trennen die durch einen gegebenen Kegelschnitt k_0, den wir als Basiskegelschnitt bezeichnen wollen, in dessen Ebene bestimmte polar-reziproke Beziehung dadurch, daß wir einem Punkte P nicht dessen Polare p und einer Geraden g nicht deren Pol G in bezug auf k_0 zuordnen, sondern wir nehmen mit p und G eine allgemeine Lagenveränderung in der Ebene vor; letztere besteht im allgemeinsten Fall aus einer Drehung um einen beliebigen Punkt, da jede mit einer Verschiebung verbundene Drehung einer Drehung um einen bestimmten andern Punkt äquivalent ist.

Eine besondere Betrachtung ist für den Fall notwendig, wo der Drehpunkt im Unendlichen liegt, also die Lagenveränderung nur aus einer Verschiebung besteht.

---

[1]) Reye, Geometrie der Lage, a. a. O.

[2]) Reye, Geometrie der Lage, a. a. O.

I. Abschnitt.

Ellipse oder Hyperbel als Basiskegelschnitt.

§ 1.

Lagenveränderung durch Drehung um einen festen Punkt Ω.

Der Mittelpunktskegelschnitt k_0

$$x^2b^2 \pm y^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

ordnet einem Punkte P_{12} dessen Polare p'_2, einer Geraden g_{12} deren Pol G'_2 zu. Nehmen wir nun in Fig. 1 mit p'_2 und G'_2 eine Drehung um einen beliebigen aber festen Punkt Ω um den Winkel φ im positiven Sinn vor, so gelangt p'_2 in eine neue Lage p_2 und G'_2 nach G_2.

Führen wir dasselbe aus für einen Punkt Q_{12}, indem wir dessen Polare q'_2 in bezug auf k_0 nach q_2 drehen, so erkennen wir aus der angegebenen Konstruktion, wie sich zu einem Element des Feldes S_2, das die Gesamtheit der gedrehten Elemente enthält, das entsprechende Element im Feld S_1 ergibt.

Ist R_2 der Schnittpunkt der Geraden p_2 und q_2, so erhalten wir die ihm entsprechende Gerade r_1, die offenbar mit $\overline{P_{12}\ Q_{12}}$ identisch ist, wenn wir R_2 im entgegengesetzten Sinn um den Winkel φ nach dem Schnittpunkt R'_2 von p'_2 und q'_2 drehen und dessen Polare r_1 in bezug auf k_0 bestimmen. Analog ergibt sich zu einer Geraden h_2 des Feldes S_2 der entsprechende Punkt H_1 in S_1, wenn wir sie erst um $-\varphi$ nach h'_2 drehen und den Pol H_1 von h'_2 in bezug auf k_0 ermitteln.

Sind x_0, y_0 die Koordinaten des Drehpunktes Ω, ist φ der Drehwinkel, sind ferner x, y die Koordinaten irgendeines Punktes, X, Y die Koordinaten desselben nach der Drehung, so bestehen die Transformationsgleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} X = x_0 + (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi \\ Y = y_0 + (y - y_0)\cos\varphi + (x - x_0)\sin\varphi \end{cases}$$

und

$$1') \quad \begin{cases} x = x_0 + (X - x_0)\cos\varphi + (Y - y_0)\sin\varphi \\ y = y_0 + (Y - y_0)\cos\varphi - (XY - x_0)\sin\varphi \end{cases}$$

Betrachten wir die Achsen des Basiskegelschnitts k_0 als Koordinatenachsen und sind x_1, y_1 die Koordinaten eines beliebigen Punktes P_{12}, dessen Doppelindex andeutet, daß er sowohl zum Feld S_1 als auch zum Feld S_2 zu rechnen ist, so lautet die Gleichung der ihm in S_2 entsprechenden Geraden:

$$2^a) \quad \begin{aligned} p_2 \equiv\ & x_1 b^2 (x_0 + (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi) \\ & \pm y_1 a^2 [y_0 + (y - y_0)\cos\varphi - (x - x_0)\sin\varphi] - a^2 b^2 = 0 \end{aligned}$$

wobei das obere bzw. das untere Vorzeichen zu gebrauchen ist, je nachdem k_0 eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Ist P_{12} dagegen ein Punkt von S_2, so besitzt die ihm entsprechende Gerade im Feld S_1 die Gleichung:

$$2^b) \quad \begin{aligned} p_1 \equiv\ & x b^2 (x_0 + (x_1 - x_0)\cos\varphi + (y_1 - y_0)\sin\varphi) \\ & \pm y a^2 [y_0 + (y_1 - y_0)\cos\varphi - (x_1 - x_0)\sin\varphi] - a^2 b^2 = 0 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt H_{12} der Geraden p_1 und p_2 ist zu P_{12} doppelt konjugiert; die nach x und y aufgelösten Gleichungen 2^a und 2^b ergeben demnach die Relationen zwischen den Koordinaten entsprechender Punkte in der quadratischen Verwandtschaft.

Die Bedingung des Ineinanderliegens entsprechender Elemente, z. B. des Punktes P_{12} in p_2 oder p_1 wird dadurch erfüllt, daß wir in den Gleichungen 2^a und 2^b

$$x_1 = x,\ y_1 = y$$

setzen. Beide Substitutionen führen zu demselben Resultat, nämlich zur Gleichung der Punktkernkurve:

$$3)\quad K \equiv (x^2 b^2 \pm y^2 a^2)\cos\varphi - xy\sin\varphi\,(\pm a^2 - b^2) + x b^2 [x_0 (1 - \cos\varphi) - y_0 \sin\varphi] \pm y a^2 [y_0 [1 - \cos\varphi) + x_0 \sin\varphi] - a^2 b^2 = 0$$

Ist k_0 eine Ellipse, so erhalten wir für die Punktkernkurve ebenfalls eine Ellipse, wenn

$\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right| < \frac{b}{a}$, dagegen eine Hyperbel, wenn $\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right| > \frac{b}{a}$ und zugleich $< \frac{a}{b}$ ist.

Für $\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right| > \frac{a}{b}$ wird sie imaginär, während sie für $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$ oder $= \frac{a}{b}$ in ein Geradenpaar zerfällt.

Ist dagegen k_0 eine Hyperbel, so ist auch K stets eine Hyperbel.

Die Achsen von K bilden mit den Achsen von k_0 bzw. die Winkel $\frac{\varphi}{2}$ und $90^0 + \frac{\varphi}{2}$. Bei beliebigem Drehpunkt Ω entsprechen demnach einem jeden Drehwinkel φ bestimmte Achsenrichtungen der Punktkernkurve.

Bewegt sich Ω auf einer Geraden, so bilden die K einen Kegelschnittbüschel; denn Gleichung 3 enthält einen linearen Parameter, wenn wir für y_0 eine lineare ganze Funktion von x_0 einführen. Aus Gleichung 3 ist ferner ersichtlich, daß der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels in ein Geradenpaar zerfällt, dessen einer Bestandteil die unendlich ferne Gerade ist.

Eine Gerade g_{12} mit den Plückerschen Linienkoordinaten u_1, v_1 hat in bezug auf den Basiskegelschnitt k_0 den Pol mit den Koordinaten:

$$x = -a^2 u_1,\quad y = \mp b^2 v_1.$$

Drehen wir den Pol um Ω um den Winkel φ, so erhalten

wir im Felde S_2 den der Geraden g_{12} entsprechenden Punkt G_2, der in Linienkoordinaten die Gleichung besitzt:

$$4^{a}) \quad u[-u_1 a^2 \cos\varphi \pm v_1 b^2 \sin\varphi + x_0(1-\cos\varphi) + y_0 \sin\varphi] \\ -v[u_1 a^2 \sin\varphi \pm v_1 b^2 \cos\varphi - y_0(1-\cos\varphi) + x_0 \sin\varphi] + 1 = 0$$

Betrachten wir g_{12} als dem Feld S_2 angehörend, so haben wir sie erst um $-\varphi$ zu drehen und den Pol G_1 der gedrehten Geraden zu ermitteln.

Es ergibt sich für G_1 die Gleichung:

$$4^{b}) \quad u a^2(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi) \pm v b^2(v_1 \cos\varphi - u_1 \sin\varphi) \\ -[u_1(x_0(1-\cos\varphi) + y_0 \sin\varphi) + v_1(y_0(1-\cos\varphi) - x_0 \sin\varphi) \\ +1] = 0$$

Da die Verbindungslinie $G_1 G_2$ zu g_{12} doppelt konjugiert ist, so ergeben sich durch Auflösung der Gleichungen 4^{a} und 4^{b} nach u und v die zwischen den Koordinaten entsprechender Geraden der quadratischen Verwandtschaft bestehenden Relationen.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$5^{a}) \quad \begin{cases} \xi_0 = x_0(1-\cos\varphi) + y_0 \sin\varphi \\ \eta_0 = y_0(1-\cos\varphi) - x_0 \sin\varphi \end{cases}$$

$$5^{b}) \quad \begin{cases} \xi'_0 = x_0(1-\cos\varphi) - y_0 \sin\varphi \\ \eta'_0 = y_0(1-\cos\varphi) + x_0 \sin\varphi, \end{cases}$$

so stellt der Punkt ξ_0, η_0 den um den Winkel $+\varphi$, der Punkt ξ'_0, η'_0 den um den Winkel $-\varphi$ gedrehten Mittelpunkt 0 von k_0 dar. Wir wollen demgemäß für die Folge den ersteren Punkt mit $O_{+\varphi}$, den letzteren mit $O_{-\varphi}$ bezeichnen. Verstehen wir unter dem „Gegenpunkt" eines Feldes denjenigen Punkt, der zur entsprechenden Geraden im andern Feld dessen unendlich ferne Gerade besitzt, so sind O und $O_{-\varphi}$ die Gegenpunkte der Felder S_1 und S_2.

Die Bedingung der Inzidenz von G_2 oder G_1 mit der Geraden g_{12} wird erfüllt, wenn wir in den Gleichungen 4^{a} oder 4^{b}

$$u_1 = u, \quad v_1 = v$$

setzen. Dadurch ergibt sich der Ort derjenigen Geraden, die ihre entsprechenden Punkte enthalten, d. h. die Geradenkernkurve

$$6)\quad \Gamma = (u^2a^2 \pm v^2b^2)\cos\varphi + \mu v \sin\varphi\,(a^2 \mp b^2) - (u\xi_0 + v\eta_0 + 1) = 0.$$

Die Form der Gleichung läßt erkennen, daß Γ bei konstanter Drehung und beliebig veränderter Lage des Drehpunkts Ω zwei feste, durch den Mittelpunkt von k_0 gehende Gerade berührt. Bewegt sich insbesondere Ω geradlinig, so bilden die Geradenkernkurven eine Kegelschnittschar.

Die Gleichung von Γ in Punktkoordinaten erhalten wir mittels der folgenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} a^2\cos\varphi & \frac{1}{2}\sin\varphi\,(a^2 \mp b^2) & -\frac{1}{2}\xi_0 & x \\ \frac{1}{2}\sin\varphi\,(a^2 \mp b^2) & \pm b^2\cos\varphi & -\frac{1}{2}\eta_0 & y \\ -\frac{1}{2}\xi_0 & -\frac{1}{2}\eta_0 & -1 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ausrechnung der Determinante ergibt:

$$\begin{aligned} 6')\quad \Gamma \equiv\; & x^2\left(\pm b^2\cos\varphi + \frac{1}{4}\eta_0{}^2\right) + y^2\left(a^2\cos\varphi + \frac{1}{4}\xi_0{}^2\right) \\ & - xy\left(\frac{\xi_0\,\eta_0}{2} + \sin\varphi\,(a^2 \mp b^2)\right) \\ & + x\left(\frac{\eta_0}{2}\sin\varphi\,(a^2 \mp b^2) \pm b^2\,\xi_0\cos\varphi\right) \\ & + y\left(\frac{\xi_0}{2}\sin\varphi\,(a^2 \mp b^2) - a^2\,\eta_0\cos\varphi\right) \\ & \mp a^2\,b^2\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\varphi\,(a^2 \mp b^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen dieser Gleichung ergibt sich, indem wir die rechte Seite der Gleichung 3 symbolisch mit K bezeichnen, die folgende wichtige Identität:

$$7)\qquad \Gamma \equiv \pm K + \frac{1}{4}\left(x\eta_0 - y\xi_0 + \sin\varphi\,(a^2 \pm b^2)\right)^2$$

Die beiden Kernkurven berühren sich folglich doppelt in den Schnittpunkten mit der Geraden:

8) $$w \equiv x\eta_0 - y\xi_0 + \sin\varphi(a^2 \pm b^2) = 0,$$

die zur Verbindungslinie der Gegenpunkte beider Felder parallel ist.

Um den Pol W der Berührungssehne w zu erhalten, bestimmen wir mit Hilfe der Gleichungen 2^a und 2^b diejenige Gerade, welche die doppelt konjugierten Punkte P_{12} und Π_{12} miteinander verbindet. Die Gleichung derselben hat die Form:

$$p_1 - \lambda p_2 = 0$$

$$\text{wobei } \lambda = \frac{(p_1)\,x_1\,y_1}{(p_2)\,x_1\,y_1} = \frac{K}{K} = +1.$$

Es ergibt sich:

$$x[y_1(a^2 \pm b^2)\sin\varphi \pm b^2\xi'_0] + y[a^2\eta'_0 - x_1(a^2 \pm b^2)\sin\varphi] \mp x_1 b^2 \xi_0' - y_1 a^2 \eta_0' = 0.$$

Die letztere Gleichung wird für beliebige Werte von x_1, y_1 stets erfüllt für:

9) $$x = \frac{a^2\eta'_0}{(a^2 \pm b^2)\sin\varphi}, \quad y = \frac{\mp b^2\xi'_0}{(a^2 \pm b^2)\sin\varphi};$$

und diese Gleichungen können wir auch durch die beiden folgenden ersetzen:

9′) $$x = \frac{a^2\left(x_0\cos\frac{\varphi}{2} + y_0\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{(a^2 \pm b^2)\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$y = \frac{\mp b^2\left(x_0\sin\frac{\varphi}{2} - y_0\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{(a^2 \pm b^2)\cos\frac{\varphi}{2}}$$

Wie aus Gleichung 9′ ersichtlich, besteht zwischen dem Drehpunkt Ω und dem Pol W eine affine Beziehung, in welcher der Anfangspunkt, d. h. der Mittelpunkt des Basiskegelschnitts k_0 der Doppelpunkt ist. Bewegt sich demnach bei einem bestimmten φ

der Drehpunkt auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitt, so beschreibt auch der gemeinsame Pol der beiden Kernkurven eine gerade Linie oder einen Kegelschnitt derselben Art.

Durch Elimination von φ aus den Gleichungen 9′ folgt:

$$x x_0 b^2 (a^2 \pm b^2) \pm y y_0 a^2 (a^2 \pm b^2) - a^2 b^2 (x_0^2 + y_0^2) = 0.$$

Die Gleichung der Berührungssehne w nimmt unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\xi_0 = \sin\varphi \left(x_0 \tan\frac{\varphi}{2} + y_0 \right)$$

$$\eta_0 = \sin\varphi \left(y_0 \tan\frac{\varphi}{2} - x_0 \right)$$

die Form an:

$$x \left(y_0 \tan\frac{\varphi}{2} - x_0 \right) - y \left(x_0 \tan\frac{\varphi}{2} + y_0 \right) + a^2 + b^2 = 0$$

und ist beständig erfüllt für:

$$x = \frac{x_0 (a^2 \pm b^2)}{x_0^2 + y_0^2}, \quad y = \frac{y_0 (a^2 + b^2)}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Hieraus folgt:

Die Berührungssehne der Kernkurven erzeugt bei verändertem Drehwinkel φ einen Strahlenbüschel, dessen Scheitel S auf $0\,\Omega$ liegt, während der gemeinsame Pol W der Kernkurven eine gerade Punktreihe beschreibt, deren Träger s die Polare des Punktes S in bezug auf den Basiskegelschnitt k_0 ist.

Der Mittelpunkt der Punktkernkurve K hat die Koordinaten:

$$x = \frac{a^2 (\eta'_0 \sin\varphi (a^2 \mp b^2) \pm 2 b^2 \xi'_0 \cos\varphi)}{(a^2 \pm b^2) \sin^2\varphi \mp 4 a^2 b^2}$$

$$y = \frac{+ b^2 (\xi'_0 \sin\varphi (a^2 + b^2) + 2 a^2 \eta'_0 \cos\varphi)}{(a^2 \pm b^2) \sin^2\varphi \mp 4 a^2 b^2}$$

Führen wir mittels der Substitution $\tan\frac{\varphi}{2} = t$ einen rationalen Parameter ein und berücksichtigen ferner, daß

$$\xi'_0 = \sin\varphi\left(x_0\tan\frac{\varphi}{2} - y_0\right)$$

$$\eta'_0 = \sin\varphi\left(y_0\tan\frac{\varphi}{2} + x_0\right)$$

so lassen sich obige Gleichungen durch die beiden folgenden ersetzen:

$$x = \frac{a^2 t\,(x_0\,t\,(\pm b^2t^2 - a^2) - y_0\,(a^2t^2 \mp b^2))}{(a^2t^2 \mp b^2)\,(\pm b^2t^2 - a^2)}$$

$$y = \frac{\pm b^2 t\,(y_0\,t\,(a^2t^2 \mp b^2) + x_0\,(\pm b^2t^2 - a^2))}{(a^2t^2 \mp b^2)\,(\pm b^2t^2 - a^2)}$$

Für $t = 0$ ist $x = y = 0$

für $t = \infty$ $\quad x = x_0,\ y = y_0$.

Berücksichtigen wir nun das obere Vorzeichen, so ergeben sich als Asymptoten die Geraden:

$$2a^2(x\,b \pm y\,a) - x_0\,b\,(a^2 + b^2) = 0$$

$$2b^2(\pm x\,b + y\,a) - y_0\,a\,(a^2 + b^2) = 0.$$

Der Mittelpunkt der Punktkernkurve beschreibt bei verändertem Drehwinkel eine durch den Anfangspunkt und den Drehpunkt Ω gehende unikursale Kurve 4. Ordnung, deren Asymptoten paarweise zu den Diagonalen des dem Basiskegelschnitt k_0 umschriebenen Rechtecks parallel laufen; sie reduziert sich, wenn k_0 ein Kreis ist, auf eine gleichseitige Hyperbel.

Setzen wir

$$x' = \frac{a^2 x_0 t^2}{a^2t^2 - b^2}, \quad y' = \frac{b^2 x_0 t}{a^2t^2 - b^2}$$

$$x'' = \frac{-a^2 y_0 t}{b^2t^2 - a^2}, \quad y'' = \frac{b^2 y_0 t^2}{b^2t^2 - a^2}$$

so erscheint die Parametergleichung der Kurve in der Form:

$$x = x' + x'', \quad y = y' + y''.$$

Die beiden Punkte (x', y') und (x'', y'') bestimmen die durch den Anfangspunkt gehenden Hyperbeln:

$$\frac{\left(x' - \frac{x_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\frac{b}{a}\frac{x_0}{2}\right)^2} - 1 = 0$$

$$\frac{-x''^2}{\left(\frac{a}{b}\frac{y_0}{2}\right)^2} + \frac{\left(y'' - \frac{y_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{y_0}{2}\right)^2} - 1 = 0.$$

Die Punkte obiger Kurve 4. Ordnung können durch Addition der Abszissen und Ordinaten korrespondierender Punkte dieser beiden Hyperbeln erhalten werden; dabei haben entsprechende Punkte die Eigenschaft, daß das Produkt der Tangenten der Winkel, welche die vom Anfangspunkt nach denselben gehenden Radienvektoren mit der x-Achse bilden, konstant gleich $\frac{-b^4}{a^4}$ ist.

Sind x_m, y_m die Mittelpunktskoordinaten der Punktkernkurve K, so ergeben sich für die Achsen derselben die Gleichungen:

$$(x - x_m)\,t - (y - y_m) = 0$$
$$x - x_m + t\,(y - y_m) = 0.$$

Nach Einführung der Werte für x_m und y_m ergibt sich:

$$t\,[x\,(a^2t^2 - b^2)\,(b^2t^2 - a^2) - a^2t\,(x_0\,t\,(b^2t^2 - a^2) - y_0\,(a^2t^2 - b^2))]$$
$$- [y\,(a^2t^2 - b^2)\,(b^2t^2 - a^2) - b^2t\,(y_0\,t\,(a^2t^2 - b^2) + x_0\,(b^2t^2 - a^2))] = 0.$$

Nach erfolgter Reduktion und Abscheidung des Faktors $a^2t^2 - b^2$ reduziert sich die Gleichung auf die folgende:

$$t^3\,b^2\,(x - x_0) + t^2\,(y_0\,(a^2 + b^2) - y\,b^2) - t\,a^2\,(x - x_0) + y\,a^2 = 0.$$

Für die andere Achse erhalten wir analog:

$$t^3 a^2(y-y_0)+t^2\left(a^2 x-x_0(a^2+b^2)\right)-t b^2(y-y_0)-x b^2=0.$$

Durch Elimination des Parameters t aus diesen Gleichungen und den nach t differenzierten ergibt sich die Gleichung der Einhüllenden.

Die Rechnung, die nur für die erste Achse ausgeführt ist, liefert:

$$\begin{aligned}&4 b^2(x^2 a^2-y^2 b^2)^2-4 b^2\left(4 x^3 x_0 a^4+5 x^2 y y_0 a^2(a^2+b^2)\right.\\&-4 x y^2 x_0 a^2 b^2+3 y^3 y_0 b^2(a^2+b^2)\left.\right)+x^2 a^2\left(24 x_0^2 a^2 b^2\right.\\&+y_0^2(a^2+b^2)^2\left.\right)+4 y^2 b^2\left(3 y_0^2(a^2+b^2)^2-2 x_0^2 a^2 b^2\right)\\&+40 x y x_0 y_0 a^2 b^2(a^2+b^2)-20 x x_0 a^2\left(y_0^2(a^2+b^2)^2\right.\\&+8 x_0^2 a^2 b^2\left.\right)-4 y y_0(a^2+b^2)\left(5 x_0^2 a^2 b^2+y_0^2(a^2+b^2)^2\right)\\&+a^2 x_0^2\left(4 a^2 b^2 x_0^2+y_0^2(a^2+b^2)^2\right)=0.\end{aligned}$$

Die Achse umhüllt bei verändertem Drehwinkel eine Kurve 4. Ordnung und 3. Klasse, welche die x-Achse im Punkte $x=x_0$ berührt und die durch den Drehpunkt Ω zur y-Achse gezogene Parallele als Wendetangente besitzt mit dem Wendepunkt $x=x_0$, $y=\dfrac{y_0(a^2+b^2)}{b^2}$.

Um die Enveloppen der Kernkurven K und Γ zu bestimmen, machen wir die Gleichungen 3 und 6 derselben rational mit Hilfe der schon früher eingeführten Substitution $\tan\dfrac{\varphi}{2}=t$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}&t^2(x^2 b^2+y^2 a^2-2 x x_0 b^2-2 y y_0 a^2+a^2 b^2)-2t\left(y x_0 a^2-x y_0 b^2\right.\\&\left.-x y(a^2-b^2)\right)+a^2 b^2-x^2 b^2-y^2 a^2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&t^2(u^2 a^2+v^2 b^2+2 u x_0+2 v y_0+1)-2t\left(u v(a^2-b^2)+v x_0\right.\\&\left.-u y_0\right)+1-u^2 a^2-v^2 b^2=0\end{aligned}$$

Durch Differenziation und Elimination von t ergeben sich die Gleichungen:

$$(x^2b^4+y^2a^4)\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\big)-(xx_0b^2+yy_0a^2-a^2b^2)^2=0$$

$$(u^2+v^2)(u^2a^4+v^2b^4+2(ux_0a^2+vy_0b^2)+x_0^2+y_0^2)$$
$$-(ux_0+vy_0+1)^2=0$$

Die Einhüllende der Punktkernkurve bei verändertem Drehwinkel ist eine zirkulare Kurve 4. Ordnung, welche die durch den Drehpunkt Ω gehenden isotropen Geraden sowie die beiden Geraden:

$$xb^2\pm iya^2=0$$

als Doppeltangenten besitzt. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten sind die Schnittpunkte derselben mit der unendlich fernen Geraden und mit der Polaren des Punktes Ω in bezug auf k_0. Die Kurve berührt ferner den Basiskegelschnitt in denjenigen vier Punkten, in welchen derselbe von der gleichseitigen Hyperbel:

$$\left(x-\frac{x_0a^2}{a^2-b^2}\right)\left(y-\frac{y_0b^2}{a^2-b^2}\right)+\frac{x_0y_0a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}=0$$

geschnitten wird.

Die Enveloppe der Geradenkernkurve bei verändertem Drehwinkel ist eine Kurve 4. Klasse, welche die unendlich fernen imaginären Kreispunkte als Doppelpunkte besitzt; die zugehörigen Doppelpunktstangenten gehen nach dem Anfangspunkt und nach dem Drehpunkt Ω.

Der Ort der Berührpunkte der beiden Kernkurven ergibt sich durch Elimination von t aus den beiden Gleichungen:

$$t^2(x^2b^2+y^2a^2-2xx_0b^2-2yy_0a^2+a^2b^2)+2t(xy(a^2-b^2)$$
$$+xy_0b^2-yx_0a^2)+a^2b^2-x^2b^2-y^2a^2=0$$
$$x(y_0t-x_0)-y(x_0t+y_0)+a^2+b^2=0.$$

Wir erhalten:

$$(x^2+y^2)\{(x^2b^2-y^2a^2)(x_0{}^2-y_0{}^2)+2xyx_0y_0(a^2+b^2)\}$$
$$-2x^3x_0b^2(a^2+b^2-x_0{}^2-y_0{}^2)-2x^2yy_0\{(a^2+b^2)(a^2+2x_0{}^2)$$
$$+b^2(x_0{}^2-y_0{}^2)\}-2xy^2x_0\{(a^2+b^2)(b^2+2y_0{}^2)+a^2(y_0{}^2-x_0{}^2)\}$$
$$-2y^3y_0a^2(a^2+b^2+y_0{}^2-x_0{}^2)+x^2b^2\{(a^2+b^2)^2-2b^2x_0{}^2$$
$$-a^2(x_0{}^2-y_0{}^2)\}+y^2a^2\{(a^2+b^2)^2-2a^2y_0{}^2-b^2(y_0{}^2-x_0{}^2)\}$$
$$-2xyx_0y_0(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)(xx_0b^4+yy_0a^4)+a^2b^2(a^2$$
$$+b^2)^2=0$$

Halten wir dieses Ergebnis mit den früheren zusammen, so ergibt sich:

Bleibt der Drehpunkt Ω fest, während der Drehwinkel φ alle Werte von 0 bis 2π annimmt, so beschreibt der gemeinsame Pol der Kernkurven eine gerade Linie und ihre Berührungspunkte erzeugen zusammen eine Kurve 4. Ordnung, welche durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene geht.

Besonders bemerkenswert ist der Spezialfall, wo der Drehpunkt Ω mit dem Mittelpunkt des Basiskegelschnitts k_0 identisch ist.

Die Gleichungen der Kernkurven:

$$K\equiv(\pm x^2b^2+y^2a^2)\cos\varphi-xy(a^2+b^2)\sin\varphi\mp a^2b^2=0$$
$$\Gamma\equiv(\pm x^2b^2+y^2a^2)\cos\varphi-xy(a^2\mp b^2)\sin\varphi\mp a^2b^2\cos^2\varphi$$
$$+\frac{(a^2\mp b^2)^2}{4}\sin^2\varphi=0$$

unterscheiden sich lediglich durch das konstante Glied, stellen also zwei konzentrische, ähnlich und ähnlich gelegene Kegelschnitte dar, deren Achsen mit denen von k_0 bzw. die Winkel $\frac{\varphi}{2}$ und $90^0+\frac{\varphi}{2}$ einschließen. Die Fig. 2 zeigt die Kernkurven für $a:b=3:2$ und $\varphi=60^0$.

Das Fundamentaldreieck der zugehörigen quadratischen Verwandtschaft besitzt als die eine stets reelle Ecke den Mittelpunkt von k_0, während die gegenüber liegende Seite die un-

endlich ferne Gerade ist; die beiden andern Ecken und Seiten sind reell oder imaginär, je nachdem k_0 eine Hyperbel oder Ellipse darstellt.

Hieraus folgt:

Den ∞^2 Geraden der Ebene als Träger von Punktreihen entsprechen in der quadratischen Verwandtschaft diejenigen ∞^2 Kegelschnitte, die durch den Mittelpunkt von k_0 gehen und zur Punktkernkurve ähnlich und ähnlich gelegen sind; den ∞^2 Punkten der Ebene als Träger von Strahlenbüscheln sind in der quadratischen Geradenverwandtschaft diejenigen ∞^2 Parabeln zugeordnet, die mit der Geradenkernkurve in deren Mittelpunkt dieselbe Involution konjugierter Strahlen erzeugen.

Besonderes Interesse bietet der Fall, wo der Basiskegelschnitt k_0 eine gleichseitige Hyperbel ist. Hat k_0 die Gleichung:

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0,$$

so reduzieren sich die Gleichungen von K und Γ auf:

$$(x^2 - y^2)\cos\varphi + 2xy\sin\varphi - a^2 = 0.$$

Das ist eine mit k_0 kongruente und um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ gegen dieselbe gedrehte gleichseitige Hyperbel.

Die einem Punkte P_{12} (x_1, y_1) entsprechenden Geraden p_1 und p_2 fallen ebenfalls in eine Gerade zusammen:

$$x(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi) - y(y_1\cos\varphi - x_1\sin\varphi) - a^2 = 0.$$

Ebenso vereinigen sich die einer Geraden g_{12} entsprechenden Punkte G_1 und G_2.

Es ergibt sich demnach:

Ist der Basiskegelschnitt k_0 eine gleichseitige Hyperbel, so fallen für jeden Drehwinkel φ die beiden Kernkurven in eine gleichseitige Hyperbel zusammen, die aus k_0 durch eine Drehung um $\frac{\varphi}{2}$

hervorgeht. Die allgemeine Korrelation reduziert sich dabei auf eine involutorische Korrelation, deren Basis die gedrehte Hyperbel ist.

Stellt k_0 einen allgemeinen Mittelpunktskegelschnitt dar, so ist, wenn e' die lineare Exzentrizität der Punktkernkurve bezeichnet,

$$e'^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 \mp b^2)}{a^2 b^2 \mp \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} a^2 \pm b^2)^2}$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt:

$$(x^2 a^2 \mp y^2 b^2)(\pm x^2 b^2 - y^2 a^2) + a^2 b^2 (a^2 \mp b^2)(x^2 + y^2) = 0.$$

Der Ort der Brennpunkte der Punktkernkurve K bei verändertem Drehwinkel φ ist demnach eine zu den Achsen von k_0 symmetrisch gelegene Kurve 4. Ordnung, die den Mittelpunkt von k_0 als isolierten Doppelpunkt besitzt.

Die Figuren 3[a]) und 3[b]) zeigen die Kurve für den Fall, daß k_0 eine Ellipse bzw. eine Hyperbel ist. Im ersteren Fall sind die vier Asymptoten reell und haben die Gleichungen:

$$x b \pm y a = 0, \quad x a \pm y b = 0.$$

Dagegen zeigt sich, daß die Brennpunkte von Γ bei variablem φ den Kreis:

$$x^2 + y^2 - (a^2 \mp b^2) = 0$$

erfüllen.

Die lineare Exzentrizität der Geradenkernkurve ist bei veränderter Drehung konstant und gleich der Exzentrizität des Basiskegelschnitts.

§ 2.

Lagenveränderung durch Verschiebung.

Besteht die Lagenveränderung in einer Verschiebung von der Größe λ, während die Verschiebungsrichtung mit der positiven x-Achse den Winkel ψ bilden möge, so ergibt sich die

dem Punkte P_{12} des Feldes S_1 entsprechende Gerade p_2 in S_2, wenn wir dessen Polare p'_2 in bezug auf k_0 in der angegebenen Weise verschieben. Wird P_{12} zum Feld S_2 gerechnet, so finden wir die ihm entsprechende Gerade p_1, wenn wir P_{12} erst in der entgegengesetzten Richtung um λ verschieben und die Polare p_1 des verschobenen Punktes ermitteln.

Die Gleichungen der dem Punkte $P_{12}\,(x_1\,y_1)$ entsprechenden Geraden lauten:

$10^a)\quad p_2 \equiv x x_1 b^2 \pm y y_1 a^2 - \lambda(x_1 b^2 \cos\psi \pm y_1 a^2 \sin\psi) - a^2 b^2 = 0$

$10^b)\quad p_1 \equiv x b^2 (x_1 - \lambda\cos\psi) \pm y a^2 (y_1 - \lambda \sin\psi) - a^2 b^2 = 0.$

Einer Geraden $g_{12}\ (u_1, v_1)$ sind die Punkte G_2 und G_1 zugeordnet:

$11^a)\quad G_2 \equiv u(u_1 a^2 - \lambda\cos\psi) + v(\pm v_1 b^2 - \lambda\sin\psi) - 1 = 0$

$11^b)\quad G_1 \equiv u u_1 a^2 \pm v v_1 b^2 - \lambda(u_1 \cos\psi + v_1 \sin\psi) - 1 = 0$

Setzen wir in $10^a)$ oder $10^b)$

$$x_1 = x,\ y_1 = y,$$

ferner in $11^a)$ oder $11^b)$

$$u_1 = u,\ v_1 = v,$$

so ergeben sich die Gleichungen der beiden Kernkurven:

$12)\quad K \equiv x^2 b^2 \pm y^2 a^2 - \lambda(x b^2 \cos\psi \pm y a^2 \sin\psi) - a^2 b^2 = 0.$

$13)\quad \Gamma \equiv u^2 a^2 \pm v^2 b^2 - \lambda(u\cos\psi + v\sin\psi) - 1 = 0.$

Die letztere Gleichung lautet in Punktkoordinaten:

$$13')\quad \Gamma \quad x^2\left(\pm b^2 + \frac{\lambda^2}{4}\sin^2\psi\right) + y^2\left(a^2 + \frac{\lambda^2}{4}\cos^2\psi\right) - xy\frac{\lambda^2}{4}\sin 2\psi - \lambda(\pm x b^2 \cos\psi + y a^2 \sin\psi) \mp a^2 b^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

Bei einer Verschiebung ist die Punktkernkurve ein zu k_0 ähnlich und ähnlich gelegener Kegelschnitt mit dem Mittelpunkt $\frac{\lambda}{2}\cos\psi,\ \frac{\lambda}{2}\sin\psi$;

er hat mit k_0 außer den beiden unendlich fernen Punkten noch diejenigen beiden Punkte gemein, deren Verbindungslinie der zur Verschiebungsrichtung konjugierte Durchmesser von k_0 ist.

Die Gleichung 13) läßt erkennen, daß ein Wertepaar u v. das die Gleichung von k_0:

$$u^2 a^2 \pm v^2 b^2 - 1 = 0$$

und die Gleichung des unendlich fernen Punktes:

$$u \cos\psi + v \sin\psi = 0$$

befriedigt, auch die Gleichung für Γ erfüllt; folglich besitzen die Geradenkernkurve und der Basiskegelschnitt zwei zur Verschiebungsrichtung parallele gemeinsame Tangenten.

Es ist ferner ersichtlich, daß die Asymptoten von k_0 zugleich Tangenten an Γ sind, was sich unabhängig von der reellen Existenz der Asymptoten so ausdrücken läßt, daß die Geradenkernkurve und der Basiskegelschnitt im Mittelpunkt des letzteren dieselbe Involution konjugierter Strahlen erzeugen.

Zwischen den Gleichungen 12) und 13') besteht die Identität:

14) $$\Gamma \equiv K + \frac{1}{4}(x\lambda \sin\psi - y\lambda \cos\psi)^2$$

Die Kernkurven gehen demnach in den Schnittpunkten mit der durch den Mittelpunkt von k_0 gehenden und zur Verschiebungsrichtung parallelen Geraden eine doppelte Berührung mit einander ein.

Die Figuren 4[a]) und 4[b]) zeigen die Kernkurven für die Fälle $\psi = 30^0$ und $\psi = 0^0$, wobei k_0 Ellipse ist.

Das Fundamentaldreieck der quadratischen Verwandtschaft hat eine unendlich ferne Ecke W.

Folglich sind die Verbindungslinien je zweier doppelt konjugierten Punkte parallel; die gemeinsame Richtung der-

selben ist zur Verschiebungsrichtung in bezug auf k_0 konjugiert.

Ist die Verschiebungsgröße λ konstant, während ψ alle Werte von 0 bis 2π annimmt, so bewegt sich der gemeinsame Mittelpunkt der Kernkurven auf einem Kreis vom Radius $\frac{\lambda}{2}$, der mit k_0 konzentrisch ist.

Die beiden im Endlichen gelegenen Ecken des Fundamentaldreiecks bestimmen zusammen eine Kurve, deren Gleichung lautet:

$$(x^2+y^2)(x^2b^2 \pm y^2a^2 - a^2b^2)^2 - \lambda^2(x^2b^2 \pm y^2a^2)^2 = 0.$$

Der Ort der Berührungspunkte der Kernkurven bei veränderter Verschiebungsrichtung ist eine zirkulare Kurve sechster Ordnung, die zu den Achsen des Basiskegelschnitts symmetrisch liegt und den Mittelpunkt desselben als Doppelpunkt besitzt. (Fig. 5.)

Unter denselben Voraussetzungen, daß nämlich λ konstant, ψ veränderlich, ist der Ort der Brennpunkte der Punktkernkurve:

$$x^4 + y^4\left(1+\frac{e^4}{a^2b^2}\right) + 2x^2y^2\left(1-\frac{e^4}{a^2b^2}\right)$$
$$-\frac{x^2}{2a^2}(4a^2e^2+\lambda^2(a^2+e^2)) - 2y^2\left(1+\frac{e^4}{a^2b^2}\right)\left(\frac{b^2\lambda^2}{4a^2}-e^2\right)$$
$$+\left(\frac{b^2\lambda^2}{4a^2}-e^2\right)^2 = 0.$$

Diese zu den Koordinatenachsen symmetrische Kurve 4. Ordnung besitzt die durch den Anfangspunkt gehenden Asymptoten:

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{m-1 \pm \sqrt{m(m-3)}}{m+1}}$$

wobei $m = \frac{e^4}{a^2b^2}$ und $e^2 = a^2 - b^2$ gesetzt ist.

Die Kurve, die sich graphisch leicht darstellen läßt, ist in Fig. 6 veranschaulicht.

Da λ in den höchsten Gliedern nicht vorkommt, so sind die Asymptoten von der Größe der Verschiebung unabhängig.

Dieselben fallen für $m = 3$ in das eine Asymptotenpaar: $\frac{y}{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ zusammen.

Ist insbesondere $e = \frac{b\lambda}{2a}$, so besitzt die Kurve im Anfangspunkt eine Spitze mit der y-Achse als zugehöriger Tangente.

II. Abschnitt.

Ein Kreis als Basiskegelschnitt.

§ 3.

Lagenveränderung durch Drehung.

Setzen wir in den allgemeinen Entwicklungen des § 1 $a = b = r$, so ergeben sich die für diesen Fall notwendigen Gleichungen.

Einem Punkte $P_{1\,2}\ (x_1,\ y_1)$ entsprechen in den Feldern S_2, S_1 bzw. die Geraden:

$$p_2 \equiv x\,(x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi) + y\,(x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi) + x_1\,\xi'_0 + y_1\,\eta'_0 - r^2 = 0$$

$$p_1 \equiv x(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi + \xi'_0) + y(y_1 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi + \eta'_0) - r^2 = 0.$$

Einer Geraden $g_{1\,2}\ (u_1,\ v_1)$ sind in beiden Feldern bzw. die Punkte zugeordnet:

$$G_2 \equiv u\big(r^2(v_1 \sin\varphi - u_1 \cos\varphi) + \xi_0\big) + v\big(-r^2(u_1 \sin\varphi + v_1 \cos\varphi) + \eta_0\big) + 1 = 0$$

$$G_1 \equiv u\big(-r^2(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi)\big) + v\big(-r^2(v_1 \cos\varphi - u_1 \sin\varphi)\big) + u_1\,\xi_0 + v_1\,\eta_0 + 1 = 0,$$

wobei $\xi_0\ \eta_0$ und $\xi'_0\ \eta'_0$ die Koordinaten der Punkte $O_{+\varphi}$ und $O_{-\varphi}$ bedeuten und durch die Gleichungen 5[a]) und 5[b]) definiert sind.

Diejenigen Punkte, die mit ihren entsprechenden Geraden inzident sind, erfüllen die Punktkernkurve, deren Gleichung lautet:

$$K \equiv (x^2 + y^2)\cos\varphi + x\,\xi'_0 + y\,\eta'_0 - r^2 = 0.$$

Die Punktkernkurve ist stets ein Kreis, der reell ist für positive Werte von $\cos\varphi$, d. h. für $\varphi < \frac{\pi}{2}$ und für diejenigen negativen Werte, für welche $\cos\varphi < \frac{\xi_0^2 + \eta_0^2}{4r^2}$ ist.

Diejenigen Geraden, die ihre zugeordneten Punkte enthalten, bestimmen die Geradenkernkurve:

$$\Gamma \equiv (u^2 + v^2) r^2 \cos\varphi - (u\xi_0 + v\eta_0 + 1) = 0.$$

Wie aus dieser Gleichung ersichtlich ist, sind die Punkte mit den Koordinaten 0, 0 und ξ_0, η_0 Brennpunkte von Γ.

Die Geradenkernkurve besitzt die Gegenpunkte der beiden korrelativen Felder als Brennpunkte.

In Punktkoordinaten ergibt sich für Γ die Gleichung:

$$x^2\left(r^2\cos\varphi + \frac{1}{4}\eta_0^2\right) + y^2\left(r^2\cos\varphi + \frac{1}{4}\xi_0^2\right) - \frac{xy}{2}\xi_0\eta_0 - (x\xi_0 + y\eta_0 + r^2\cos\varphi) r^2\cos\varphi = 0.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind

$$x_m = \frac{1}{2}\xi_0;\quad y_m = \frac{1}{2}\eta_0.$$

Berücksichtigen wir, daß

$$\xi'_0 = \xi_0 - 2y_0\sin\varphi,\quad \eta'_0 = \eta_0 + 2x_0\sin\varphi$$

so ergibt sich die Identität:

$$\Gamma \equiv r^2 K + \frac{1}{4}(x\eta_0 - y\xi_0 + 2r^2\sin\varphi)^2.$$

Die Kernkurven berühren sich daher doppelt in den Schnittpunkten mit der Geraden:

$$x\eta_0 - y\xi_0 + 2r^2\sin\varphi = 0,$$

die zu $OO_{+\varphi}$ parallel ist.

Der gemeinsame Pol W der Kernkurven besitzt die Koordinaten:

$$x = \frac{\eta_0}{2\sin\varphi} = \frac{1}{2}\left(x_0 - y_0 \tan\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y = \frac{-\xi_0}{2\sin\varphi} = \frac{1}{2}\left(y_0 + x_0 \tan\frac{\varphi}{2}\right)$$

Da $OW^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, somit $\overline{OW} = \frac{O\Omega}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$ ist, so folgt hieraus, daß der gemeinsame Pol W der Kernkurven der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises desjenigen Dreiecks ist, dessen Ecken der Drehpunkt Ω und die Gegenpunkte der beiden Felder sind.

Bezeichnen wir mit M und M bzw. die Mittelpunkte von K und Γ, so ergibt sich, daß die vier Punkte Ω, W, M und M in einer Geraden, der Mittelsenkrechten von OO_{φ}, liegen (Fig. 7).

Die Lage jener vier Punkte ist von r ganz unabhängig.

Wenn demnach die Basiskreise eine Schar konzentrischer Kreise bilden, so sind auch die Punktkernkurven konzentrische Kreise und die Geradenkernkurven bilden eine Schar konfokaler Kegelschnitte, für welche die Gegenpunkte der Felder die gemeinsamen Brennpunkte sind.

Ist die Lage des Drehpunktes Ω konstant, während der Drehwinkel φ alle Werte von 0 bis 2π annimmt, so bleibt der eine Brennpunkt O von Γ fest; der andere beschreibt einen Kreis um Ω als Mittelpunkt und dem Radius ΩO.

Der Pol W bewegt sich auf der Mittelsenkrechten von $O\Omega$, der Mittelpunkt M von Γ auf dem über $O\Omega$ als Durchmesser beschriebenen Kreis, während der Mittelpunkt M von K eine gleichseitige Hyperbel erzeugt, für welche die Punkte O und Ω die Scheitel der Hauptachse sind.

Bemerkenswert ist ferner, daß die Berührungssehne w einen Strahlenbüschel beschreibt, dessen Scheitel auf $O\Omega$ liegt und der die Koordinaten besitzt:

$$x = \frac{2r^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad y = \frac{2r^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

In dem Spezialfall, wenn die Drehung um den Mittelpunkt des Basiskreises k_0 erfolgt, erhalten wir als Gleichungen der Kernkurven:

$$K \equiv x^2 + y^2 - r^2 \sec\varphi = 0$$
$$\Gamma \equiv (u^2 + v^2) r^2 - \sec\varphi = 0.$$

Die Kernkurven bestehen aus zwei zum Basiskreis k_0 konzentrischen Kreisen mit den Radien $r\sqrt{\sec\varphi}$ und $r\sqrt{\cos\varphi}$ und sie werden imaginär für $\cos\varphi < 0$.

Der Radius von k_0 ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Radien von K und Γ.

Die Ecken des Fundamentaldreiecks der zugehörigen quadratischen Verwandtschaft sind der Mittelpunkt von k_0 und die imaginären Kreispunkte der Ebene.

Entsprechende Punkte liegen auf einer durch O gehenden Geraden und entsprechende Geraden sind parallel, da die Berührungssehne ∞ fern ist.

Hieraus ergibt sich:

Die quadratische Punktverwandtschaft ist in diesem besonderen Spezialfall identisch mit der Inversion oder Transformation durch reziproke Radien, die den Mittelpunkt des Basiskreises als Inversionszentrum und die Größe $r^2 \sec\varphi$ als Potenz besitzt.

Den Geraden eines Strahlenbüschels sind die Tangenten desjenigen Kegelschnittes zugeordnet, der die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt; dieselben sind aber die unendlich ferne Gerade und die von O ausgehenden isotropen Geraden.

Hiernach finden wir:

Den ∞^2 Punkten als Träger von Strahlenbüscheln entsprechen in der quadratischen Geradenverwandtschaft diejenigen ∞^2 Parabeln, die den Mittelpunkt des Basiskreises als gemeinsamen Brennpunkt besitzen.

§ 4.

Lagenveränderung durch Verschiebung.

Besteht die Lagenveränderung für den Kreis k_0 als Basiskegelschnitt lediglich aus einer Verschiebung von der Größe λ, während die Verschiebungsrichtung mit der x-Achse den Winkel ψ bilden möge, so ergeben sich für die Kernkurven die Gleichungen:

$$K \equiv x^2 + y^2 - \lambda(x\cos\psi + y\sin\psi) - r^2 = 0$$
$$\Gamma \equiv (u^2 + v^2)r^2 - \lambda(u\cos\psi + v\sin\psi) - 1 = 0.$$

Beziehen wir die Gleichungen auf ein um den Winkel ψ gedachtes Koordinatensystem, so erhalten wir:

$$K \equiv \left(x' - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + y'^2 - \left(r^2 + \frac{\lambda^2}{4}\right) = 0$$
$$\Gamma \equiv \frac{\left(x' - \frac{\lambda}{2}\right)^2}{r^2 + \frac{\lambda^2}{4}} + \frac{y'^2}{r^2} - 1 = 0.$$

Bei einer Verschiebung besitzt die Geradenkernkurve den Radius des Basiskreises als kleine Halbachse und die Gegenpunkte der Felder als Brennpunkte, während der über ihrer großen Achse als Durchmesser beschriebene Kreis die Punktkernkurve darstellt.

III. Abschnitt.

Eine Parabel als Basiskegelschnitt.

§ 5.

Lagenveränderung durch Drehung.

Sind x_0, y_0 wieder die Koordinaten des Drehpunkts Ω und ist die Gleichung der Basisparabel k_0 in ihrer einfachsten Form

$$y^2 - 2px = 0$$

angenommen, so ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen 1) und 1′) des § 1 die einem Punkte $P_{12}(x_1, y_1)$ entsprechenden Geraden:

15ª) $p_2 \equiv x(y_1 \sin\varphi + p\cos\varphi) - y(y_1\cos\varphi - p\sin\varphi) + p\xi'_0 - y_1\eta'_0 + px_1 = 0$

15ᵇ) $p_1 \equiv x\cdot p - y(\eta'_0 - x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) + p(\xi'_0 + x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi) = 0.$

Die Bedingung der Inzidenz von P_{12} mit p_2 oder p_1 führt mittelst der Substitutionen:

$$x_1 = x,\ y_1 = y$$

auf die Gleichung der Punktkernkurve:

16) $K \equiv y^2\cos\varphi - xy\sin\varphi - xp(1+\cos\varphi) - y(p\sin\varphi - \eta'_0) - p\xi'_0 = 0.$

Die Punktkernkurve ist für jeden Drehwinkel φ eine Hyperbel, die für $\varphi = 90^0$ gleichseitig wird; die Achsen derselben bilden mit der Achse der Basisparabel bzw. die Winkel $\frac{\varphi}{2}$ und $90^0 + \frac{\varphi}{2}$.

Der Mittelpunkt von K besitzt die Koordinaten:

$$x = \frac{y_0 + x_0 \cot\frac{\varphi}{2} - p\cot^3\frac{\varphi}{2}}{\cot\frac{\varphi}{2}}$$

$$y = \frac{-p\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = -p\cot\frac{\varphi}{2}.$$

Derselbe bewegt sich demnach bei einem bestimmten φ und beliebiger Lage von Ω auf einer zur Achse der Basisparabel parallelen Geraden.

Bei fester Lage des Drehpunkts und verändertem Drehwinkel dagegen beschreibt der Mittelpunkt die Kurve dritter Ordnung:

$$y^3 + yp(x - x_0) + y_0 p^2 = 0,$$

die den unendlich fernen Punkt der x-Achse als Doppelpunkt mit der unendlich fernen Geraden und der x-Achse als zugehörigen Tangenten besitzt.

Durch eine Verschiebung des Koordinatensystems nach dem Mittelpunkt von K und durch Drehung desselben um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ reduziert sich Gleichung 16) der Punktkernkurve auf:

16′) $$x'^2\sin^2\frac{\varphi}{2} - y'^2\cos^2\frac{\varphi}{2} - p\left(p\cot^2\frac{\varphi}{2} - 2x_0\right) = 0,$$

woraus ersichtlich ist, daß die reelle Achse der Hyperbel zum Winkel $\frac{\varphi}{2}$ oder $90^0 + \frac{\varphi}{2}$ gehört, je nachdem $x_0 \lesseqgtr \frac{p}{2}\cot^2\frac{\varphi}{2}$ ist.

Mit Hilfe der Gleichung 16′) ergeben sich die Koordinaten der Scheitel der Hauptachse zu:

$$x = x_0 + y_0\tan\frac{\varphi}{2} - \cot^2\frac{\varphi}{2}\left(p \mp \sqrt{p\left(p - 2x_0\cot^2\frac{\varphi}{2}\right)}\right)$$

$$y = \left(\pm\sqrt{p\left(p - 2x_0\cot^2\frac{\varphi}{2}\right)}\right)\cot\frac{\varphi}{2}.$$

Durch Elimination von φ erhalten wir:

$$y^4 + 2pxy^2 + 2px_0y^2 + 4p^2(xx_0 + yy_0) = 0.$$

Der Ort der Scheitel der einen Achse der Punktkernkurve ist bei verändertem φ eine durch den Anfangspunkt gehende Kurve 4. Ordnung; dieselbe besitzt den unendlich fernen Punkt der x-Achse als dreifachen Punkt, dessen zugehörige Tangenten durch die unendlich ferne Gerade und das Geradenpaar $y^2 + 2px_0 = 0$ dargestellt werden.

Vertauschen wir die x-Achse mit der y-Achse, die y-Achse mit der unendlich fernen Geraden, so daß jener singuläre Punkt in den Anfangspunkt fällt, und setzen $y_0 = 0$, so stellt obige Kurve das parabolische Trifolium[1]) dar.

Vermittelst der Substitution $\tan\frac{\varphi}{2} = t$ nimmt Gleichung 16) die Form an:

$$t^2(2yy_0 - 2px_0 - y^2) - 2t(xy + y(p - x_0) - py_0) + y^2 - 2px = 0.$$

Indem wir aus dieser Gleichung und aus der nach t differenzierten Gleichung den Parameter eliminieren, erhalten wir:

$$(2yy_0 - 2px_0 - y^2)(y^2 - 2px) - (xy + y(p - x_0) - py_0)^2 = 0$$

oder nach einiger Umformung:

$$y^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + p^2(y + y_0)^2 - (2px - yy_0)(2px_0 - yy_0) = 0.$$

Die Punktkernkurve K erzeugt bei verändertem Drehwinkel eine zirkulare Kurve 4. Ordnung, die den unendlich fernen Punkt der x-Achse als Spitze mit der x-Achse als zugehöriger Spitzentangente besitzt. Sie schneidet die x-Achse noch in einem im Endlichen gelegenen Punkt mit der Abszisse $x = \frac{y_0^2}{4x_0}$ und berührt die Basisparabel in

[1]) Loria, ebene Kurven, II. Aufl. I. Bd. 1910, S. 114.

denjenigen vier Punkten, in denen dieselbe von der gleichseitigen Hyperbel:

$$(x-(x_0-p))\,y-p\,y_0=0$$

geschnitten wird.

Mit Hilfe des Parameters t ergeben sich für die Achsen von K die Gleichungen:

$$t^2 y_0 - t(x-x_0)+y=0$$
$$t^3(y-y_0)+t^2(x-x_0+p)+p=0$$

und demnach als Enveloppen derselben:

$$(x-x_0)^2-4y_0\cdot y=0$$
$$4\,(x-(x_0+p))^3+27\,p(y-y_0)^2=0.$$

Bei veränderlicher Drehung umhüllt die eine Achse der Punktkernkurve eine Parabel mit dem Scheitel $(x_0, 0)$ und dem Parameter $4y_0$, die andere dagegen eine semikubische Parabel, die den Punkt $x=x_0+p$, $y=y_0$ als Spitze, den unendlich fernen Punkt der y-Achse als Wendepunkt und die unendlich ferne Gerade als Wendetangente besitzt.

Einer Geraden g_{12} (u_1, v_1) sind in beiden Feldern S_2 und S_1 bzw. die Punkte G_2 und G_1 zugeordnet:

17a) $$G_2 \equiv u(u_1\xi_0+v_1 p\sin\varphi+\cos\varphi)+v(u_1\eta_0-v_1 p\cos\varphi+\sin\varphi)+u_1=0$$

17b) $$G_1 \equiv u(u_1\xi_0+v_1\eta_0+1)+vp(u_1\sin\varphi-v_1\cos\varphi)+u_1\cos\varphi+v_1\sin\varphi=0.$$

Die Bedingung des Ineinanderliegens von G_2 oder G_1 in g_{12} führt auf die Gleichung:

18) $$\Gamma \equiv u^2\xi_0-v^2 p\cos\varphi+uv(\eta_0+p\sin\varphi)+u(1+\cos\varphi)+v\sin\varphi=0.$$

Die Geradenkernkurve ist folglich, da das Wertepaar $u=0$, $v=0$ die Gleichung befriedigt, stets eine Parabel.

Die Gleichung derselben in Punktkoordinaten ist:

$$18') \quad \Gamma \equiv \frac{1}{4}\Big[x^2\sin^2\varphi + y^2(1+\cos\varphi)^2 - 2xy\sin\varphi(1+\cos\varphi) - 2x\big(p(1+\cos\varphi)^2 + \eta_0\sin\varphi\big) - 2y\big((1+\cos\varphi)(\eta_0 + p\sin\varphi) - 2\xi_0\sin\varphi\big) + 4p\xi_0\cos\varphi + (\eta_0 + p\sin\varphi)^2\Big] = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß die Achse von Γ mit derjenigen der Basisparabel den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ bildet.

Durch Umformungen und Reduktionen der Gleichungen 16) und 18') ergibt sich die Identität:

$$19) \quad \Gamma \equiv K + \sin^2\frac{\varphi}{2}\left(x\cos\frac{\varphi}{2} + y\sin\frac{\varphi}{2} - \left(y_0\sin\frac{\varphi}{2} - (p+x_0)\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2$$

Die Berührungssehne der sich doppelt berührenden Kernkurven hat demnach die Gleichung:

$$20) \quad x\cos\frac{\varphi}{2} + y\sin\frac{\varphi}{2} - y_0\sin\frac{\varphi}{2} + (x_0+p)\cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Da diese Gerade auf der Achse von Γ senkrecht steht, so folgt daraus und aus der Eigenschaft der doppelten Berührung, daß die Achse der Geradenkernkurve Γ zugleich eine Achse der Punktkernkurve K ist.

Den Pol W der Berührungssehne finden wir am einfachsten, indem wir die Gleichung derjenigen Geraden aufstellen, die den Punkt P_{12} mit seinem doppelt konjugierten, nämlich mit dem Schnittpunkt von p_1 und p_2, verbindet.

Die Gleichung der gesuchten Geraden hat die Form:

$$p_2 - \mu p_1 = 0,$$

$$\text{wobei } \mu = \frac{(p_2)x_1 y_1}{(p_1)x_1 y_1} = +1 \text{ ist.}$$

Es ergibt sich:

$$x(y_1\sin\varphi - p(1-\cos\varphi)) + y(\eta'_0 - \sin\varphi(x_1 - p)) + px_1(1-\cos\varphi) - y_1(\eta'_0 + p\sin\varphi) = 0.$$

Diese Gleichung wird für beliebige Werte von x_1, y_1 stets erfüllt für:

$$21) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\eta'_0 + p\sin\varphi}{\sin\varphi} = p + x_0 + y_0 \tan\dfrac{\varphi}{2} \\ y = p\tan\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Ist Ω fest und φ veränderlich, so beschreibt W die Gerade:

$$xp - y\,y_0 - p(x_0 + p) = 0,$$

während die Berührungssehne einen Strahlenbüschel erzeugt, dessen Scheitel die Koordinaten:

$$x = -(x_0 + p),\ y = y_0$$

besitzt.

Transformieren wir die Gleichung 18′) der Geradenkernkurve auf ein um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ gedrehtes Koordinatensystem mit Hilfe der Relationen:

$$x = x'\cos\frac{\varphi}{2} - y'\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$y = x'\sin\frac{\varphi}{2} + y'\cos\frac{\varphi}{2}$$

so ergibt sich:

$$4y'^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 4y'\cos\frac{\varphi}{2}(\xi_0\sin\varphi - \eta_0\cos\varphi)$$
$$+ 8x'\cos\frac{\varphi}{2}\left(\left(\xi_0\sin\frac{\varphi}{2} - \eta_0\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2} - p\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$+ 4p\xi_0\cos\varphi + (\eta_0 + p\sin\varphi)^2 = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Werte für ξ_0 und η_0 und nach entsprechender Reduktion kommt:

$$\left(y' + \tan\frac{\varphi}{2}\left(x_0\cos\frac{\varphi}{2} + y_0\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 - 2\sec\frac{\varphi}{2}\left(p\cos^2\frac{\varphi}{2}\right.$$
$$\left. - 2x_0\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(x' - \frac{1}{2}\sec\frac{\varphi}{2}\left(p\sin^2\frac{\varphi}{2} + y_0\sin\varphi\right)\right) = 0.$$

Somit ergeben sich für den Scheitel von Γ im System $x'y'$ die Werte:

$$x' = \frac{1}{2}\sec\frac{\varphi}{2}\left(p\sin^2\frac{\varphi}{2} + y_0\sin\varphi\right)$$
$$y' = -\tan\frac{\varphi}{2}\left(x_0\cos\frac{\varphi}{2} + y_0\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

In bezug auf das ursprüngliche Koordinatensystem xy erhalten wir:

$$x = \left(\frac{p}{2} + x_0\right)\sin^2\frac{\varphi}{2} + y_0\tan\frac{\varphi}{2}$$
$$y = \frac{p}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\tan\frac{\varphi}{2} - \frac{x_0}{2}\sin\varphi.$$

Durch Elimination von φ erhalten wir:

$$(x^2+y^2)(4yy_0 - 2px) + 4x^2x_0p + 2xyy_0(3p - 2x_0)$$
$$+ y^2(p^2 + 2px_0 - 8y_0^2) + 2(xx_0 + yy_0)(2y_0^2 - 2px_0) = 0$$

und hieraus folgt:

Der Ort des Scheitels der Geradenkernkurve bei veränderter Drehung ist eine durch den Anfangspunkt gehende unikursale Kurve dritter Ordnung, welche die unendlich fernen imaginären Kreispunkte enthält und die Gerade:

$$xp - 2yy_0 - p\left(\frac{p}{2} + x_0\right) = 0$$

als Asymptote besitzt. Die Kurve besitzt ferner einen Doppelpunkt, dessen Parameterwerte gegeben sind durch:

$$\left.\begin{matrix}\tan\frac{\varphi_1}{2}\\ \tan\frac{\varphi_2}{2}\end{matrix}\right\} = \frac{y_0(p+2x_0) \pm \sqrt{y_0^2(p+2x_0)^2 - (p^2+4y_0^2)(4y_0^2 - 2px_0)}}{p^2+4y_0^2}.$$

Der Parameter von Γ ist

$$2p' = 2\sec\frac{\varphi}{2}\left(p\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2x_0\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Der Brennpunkt hat die Koordinaten:

$$x = \frac{p}{2} + y_0 \tan\frac{\varphi}{2},\quad y = \left(\frac{p}{2} - x_0\right)\tan\frac{\varphi}{2}$$

und genügt der Gleichung der einen Achse der Punktkernkurve, weshalb die Parabelachse mit jener Achse identisch ist und die Gleichung besitzt:

$$(x - x_0)\tan\frac{\varphi}{2} - y - y_0\tan^2\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Die Scheiteltangente ergibt sich zu:

$$2\left(x\cos\frac{\varphi}{2} + y\sin\frac{\varphi}{2}\right) - \tan\frac{\varphi}{2}\left(2y_0\cos\frac{\varphi}{2} + p\sin\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Bei veränderlichem Drehwinkel beschreibt der Brennpunkt der Geradenkernkurve die Gerade:

$$2x(p - 2x_0) - 4yy_0 - p(p - 2x_0) = 0,$$

während die Parabelachse und die Scheiteltangente bzw. die Parabeln:

$$(x - x_0)^2 - 4y_0 y = 0$$
$$(y - y_0)^2 + 2px = 0$$

umhüllen.

Spezialisieren wir die durch die allgemeine Drehung hervorgegangenen Formeln dadurch, daß wir den Scheitel der Basisparabel als Drehpunkt betrachten, so ergeben sich für die Kernkurven die Gleichungen:

$$K \equiv y^2\cos\varphi - xy\sin\varphi - xp(1 + \cos\varphi) - yp\sin\varphi = 0$$
$$\Gamma \equiv v^2 p\cos\varphi - uvp\sin\varphi - u(1 + \cos\varphi) - v\sin\varphi = 0.$$

Durch passende Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems ergibt sich die Gleichung der Punktkernkurve in der Normalform:

$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{p\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\dfrac{p}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2} - 1 = 0.$$

Die Gleichung von Γ, auf dasselbe Koordinatensystem transformiert, reduziert sich auf:

$$y'^2 - 2p\cos\frac{\varphi}{2}\left(x' - \frac{p}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\tan\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Der Scheitel derselben hat die Koordinaten:

$$x = \frac{p}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2},\quad y = \frac{p}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\tan\frac{\varphi}{2}.$$

Da die Größe $\dfrac{p\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ gleich dem Abstand des Hyperbelmittelpunktes M vom Anfangspunkt O ist, so ist letzterer der eine Endpunkt der reellen Achse von K.

Die Fig. 8 zeigt die sich stets imaginär berührenden Kernkurven für $2p = 4$ und $\varphi = 60^0$.

Die reelle Verbindungslinie w der konjugiert imaginären Berührungspunkte lautet:

$$x' = p\cos\frac{\varphi}{2}\cot^2\frac{\varphi}{2} = MZ.$$

Ist Q der Schnittpunkt der y-Achse mit der zur x-Achse parallelen Asymptote von K, so ist die von Q auf die Gerade MO gefällte Senkrechte die Berührsehne w.

Ist ferner S der Scheitel von Γ, W der Pol von w, so ist $MW = 2p\,\mathrm{cosec}\,\varphi\cdot\mathrm{cosec}\,\frac{\varphi}{2}$ und $\overline{OM}\cdot\overline{OS} = \frac{p^2}{2} = \text{const.}$

Variieren wir den Drehwinkel φ von 0 bis 2π, so beschreibt in Fig. 9 der Mittelpunkt M von K die Parabel μ:

$$y^2 - px = 0.$$

Der eine Scheitel O von K fällt beständig in den Anfangspunkt, während der andere Scheitel O' die Parabel o:

$$y^2 + 2px = 0$$

erzeugt, die zur Basisparabel k_0 in bezug auf die Scheiteltangente symmetrisch liegt.

Der Scheitel S von Γ beschreibt die Zissoide σ:

$$2x(x^2+y^2)-py^2=0,$$

während die Gerade $x=\frac{p}{2}$, d. i. die Wendeasymptote von σ, den Ort des Brennpunkts von Γ darstellt. Die Brennpunkte Φ und Φ' von K haben die Koordinaten:

$$\Phi\colon\ x=\frac{p\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{4}},\quad y=\frac{p\sin\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{4}}$$

$$\Phi'\colon\ x=\frac{-p\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{4}},\quad y=\frac{-p\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{4}}.$$

Beide erzeugen die Parabel f:

$$y^2+2p\left(x-\frac{p}{2}\right)=0,$$

die mit der Basisparabel kongruent ist, deren Scheitel als Brennpunkt und deren Brennpunkt als Scheitel besitzt.

Der Pol W beschreibt die Gerade w:

$$x-p=0$$

und die Berührungssehne w einen Strahlenbüschel mit dem Scheitel $x=-p$, $y=0$.

In Fig. 9 stellt k_0 die strichpunktierte Basisparabel dar. Die Zissoide σ ist der Ort des Scheitels S, die Gerade φ der Ort des Brennpunkts F von Γ, μ der Ort des Mittelpunktes M, o der Ort des einen Scheitels O' und f der Ort der Brennpunkte der Punktkernkurve K.

Um für einen gegebenen Drehwinkel φ die Kernkurven zu ermitteln, die in Fig. 9 der Übersichtlichkeit wegen nicht miteingezeichnet sind, ziehen wir durch den Scheitel O der Basisparabel eine gegen die Achse derselben unter dem Winkel $\frac{\varphi}{2}$

geneigte Gerade, welche aus den oben angegebenen Kurven und Geraden die Scheitel und Brennpunkte von K und Γ ergibt.

Dabei ist M stets die Mitte der Strecken OO' und $\Phi\Phi'$ und $ZS = ZW$.

Die Ecken des infolge der Gleichung 20) stets gleichschenkligen Fundamentaldreiecks der quadratischen Verwandtschaft, von dem nur die Spitze und die gegenüberliegende Seite reell sind, fallen nur dann in einen Punkt zusammen,

wenn $$\frac{2p}{\sin\varphi \cdot \sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{p\cos^3\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$ d. h. wenn $\cos^4\frac{\varphi}{2} = 1$.

Da aber für $\varphi = 0$, wo also gar keine Drehung stattfindet, die ursprüngliche involutorische Korrelation auftritt, so gibt es keinen reellen Wert von φ, für den die Fundamentalpunkte sich in einem Punkt vereinigen.

§ 6.

Lagenveränderung durch Verschiebung.

Ist λ die Größe der Verschiebung, ψ der Winkel der Verschiebungsrichtung gegen die positive x-Achse und ist die Basisparabel k_0 durch ihre Scheitelgleichung:

$$y^2 - 2px = 0$$

gegeben, so ergeben sich für die einem Punkt $P_1\ (x_1\ y_1)$ entsprechenden Geraden die Gleichungen:

$$22^a) \quad p_2 \equiv x \cdot p - y y_1 + p x_1 + \lambda(y_1 \sin\psi - p\cos\psi) = 0$$
$$22^b) \quad p_1 \equiv x \cdot p - y(y_1 - \lambda\sin\psi) + p(x_1 - \lambda\cos\psi) = 0.$$

Die einer Geraden $g_{12}\ (u_1\ v_1)$ in den Feldern S_2 und S_1 zugeordneten Punkte werden durch die Gleichungen dargestellt:

$$23^a) \quad G_2 \equiv u(1 + \lambda u_1\cos\psi) + v(u_1\lambda\sin\psi - v_1 p) + u_1 = 0$$
$$23^b) \quad G_1 \equiv u(1 + \lambda(u_1\cos\psi + v_1\sin\psi)) - v v_1 p + u_1 = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Kernkurven:

$$24)\quad K \equiv \left(y - \frac{\lambda}{2}\sin\psi\right)^2 - 2p\left(x - \frac{\lambda}{2}\left(\cos\psi - \frac{\lambda}{4p}\sin^2\psi\right)\right) = 0$$

$$25)\quad \Gamma \equiv u^2\lambda\cos\psi - v^2 p + u v \lambda\sin\psi + 2u = 0.$$

Letztere Gleichung lautet in Punktkoordinaten:

$$25')\qquad \left(y - \frac{\lambda}{2}\sin\psi\right)^2 - 2p\left(x - \frac{\lambda}{2}\cos\psi\right) = 0.$$

Beide Kernkurven sind mit der Basisparabel k_0 kongruent und haben mit ihr gleiche Achsenrichtung.

Da K und Γ außerdem gleiche Scheitelordinaten besitzen, so berühren sie sich im ∞ fernen Punkt der x-Achse doppelt und haben im Endlichen keine Schnittpunkte gemein.

Hieraus folgt:

Das Fundamentaldreieck der quadratischen Verwandtschaft reduziert sich auf einen Punkt, nämlich auf den ∞ fernen Punkt der Basisparabel.

Zufolge der Gleichungen 22^a) und 22^b) bestehen zwischen entsprechenden Punkten die Beziehungen:

$$26)\quad x = \frac{1}{p}(y_1^2 - \lambda y_1\sin\psi - p x_1 + p\lambda\cos\psi);\quad y = y_1.$$

Zwischen den Koordinaten entsprechender Geraden erhalten wir analog die Relationen:

$$27)\qquad u = \frac{u_1^2}{v_1^2 p - u_1^2\lambda\cos\psi - u_1 v_1\lambda\sin\psi - u_1};$$

$$v = \frac{u_1 v_1}{v_1^2 p - u_1^2\lambda\cos\psi - u_1 v_1\lambda\sin\psi - u_1}.$$

Einer beliebigen Geraden:

$$a x + b y + c = 0$$

entspricht der Kegelschnitt:

$$a(y_1^2 - \lambda y_1\sin\psi - p x_1 + p\lambda\cos\psi) + p(b y_1 + c) = 0;$$

einem Strahlenbüschel, dessen Scheitel die Gleichung:

$$u x_0 + v y_0 + 1 = 0$$

besitzt, sind die Tangenten des Kegelschnitts:

$$(y - (\lambda \sin \psi - y_0))^2 - 4p\,(x - (\lambda \cos \psi - x_0)) = 0$$

zugeordnet.

Wir finden also:

Den ∞^2 Geraden der Ebene als Punktreihen entsprechen in der Punktverwandtschaft alle ∞^2 kongruente Parabeln vom Parameter p und konstanter Achsenrichtung.

Den ∞^2 Punkten der Ebene als Träger von Strahlenbüscheln sind in der Geradenverwandtschaft alle ∞^2 kongruente Parabeln vom Parameter $4p$ und konstanter Achsenrichtung zugeordnet.

Bewegt sich der Scheitel jenes Strahlenbüschels linear, etwa auf der Geraden g:

$$a x + b y + c = 0,$$

so verschiebt sich die zugehörige Parabel in der Weise, daß ihr Scheitel die zu g parallele Gerade:

$$a x + b y - (a \lambda \cos \psi + b \lambda \sin \psi - c) = 0$$

beschreibt, während die zu g doppelt konjugierte Gerade die ∞^1 Parabeln berührt.

Da jedem Strahlenbüschel eine Parabel eindeutig entspricht, so können wir eine neue Verwandtschaft etwa dadurch herleiten, daß wir dem Scheitel des Strahlenbüschels den Brennpunkt der Parabel zuordnen.

Die entstehende Verwandtschaft ist durch die Gleichungen

$$x' = \lambda \cos \psi + p - x$$
$$y' = \lambda \sin \psi - y$$

definiert, wobei x, y die Koordinaten des Brennpunkts, x', y' diejenigen des Büschelscheitels sind.

Diese Gleichungen bestimmen aber eine gleichsinnige Kongruenz zwischen zwei Ebenen, deren reeller Doppelpunkt die Koordinaten:

$$x = \frac{1}{2}(\lambda \cos\psi + p),\ y = \frac{\lambda}{2}\sin\psi$$

besitzt und folglich mit dem Brennpunkt von Γ identisch ist. Die Gleichung der Verbindungslinie entsprechender Punkte wird, wie die Rechnung zeigt, beständig für die Koordinaten jenes Doppelpunktes erfüllt.

Also finden wir:

Die durch obige eindeutige Verwandtschaft aufeinander bezogenen Ebenen stellen zwei kongruente gleichsinnige ebene Systeme dar, deren Doppelpunkt der Brennpunkt der Geradenkernkurve ist; sie liegen außerdem perspektiv in bezug auf denselben, so daß sie durch eine Drehung von 180° zur Deckung gebracht werden können.

Erfolgt die Verschiebung in Richtung der Achse der Basisparabel, so reduzieren sich die Gleichungen 24) und 25′) auf:

$$y^2 - 2p\left(x - \frac{\lambda}{2}\right) = 0.$$

Die beiden Kernkurven vereinigen sich in eine Parabel, die mit der Basisparabel kongruent und gegen dieselbe um $\frac{\lambda}{2}$ verschoben ist; die Korrelationen der Felder S_1 und S_2 wird involutorisch.

Ist λ konstant, ψ veränderlich, so erzeugen der Scheitel und der Brennpunkt von Γ Kreise vom Radius $\frac{\lambda}{2}$, während der Scheitel von K eine Kurve beschreibt:

$$x = \frac{\lambda}{2}\left(\cos\psi - \frac{\lambda}{4p}\sin^2\psi\right);\ y = \frac{\lambda}{2}\sin\psi$$

in impliziter Form:

$$(y^2 + 2px)^2 + p^2(4y^2 - \lambda^2) = 0.$$

Der Ort des Scheitels der Punktkernkurve ist eine zur x-Achse symmetrische Kurve 4. Ordnung, die im unendlich fernen Punkt der x-Achse einen imaginären Selbstberührungspunkt mit der unendlich fernen Geraden als Tangente besitzt. Die Kurve, die in Fig. 10 dargestellt ist, erreicht ihren höchsten bzw. tiefsten Punkt in

$$x = -\frac{\lambda^2}{8p},\ y = \pm\frac{\lambda}{2},$$

während die drei Geraden:

$$x = \pm\frac{\lambda}{2},\ x = -\frac{(\lambda^2 + 4p^2)}{8p}$$

zur y-Achse parallele Tangenten sind.

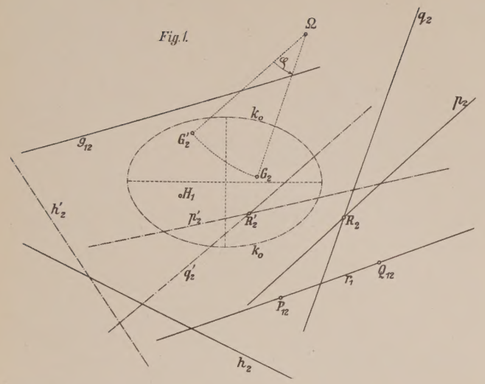
Durch Verschiebung dieser Kurve um $\frac{p}{2}$ in Richtung der positiven x-Achse ergibt sich der Ort des Brennpunkts der Punktkernkurve.

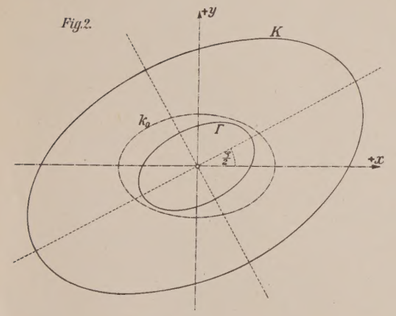
Beziehungen zur allgemeinen Korrelation.

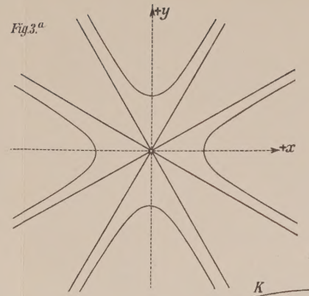
Jede involutorische Korrelation kann als zwei in spezieller Lage befindlicher korrelativer Felder betrachtet werden. Bestimmen wir nämlich in jedem Feld den Gegenpunkt und verschieben das eine Feld solange, bis die Gegenpunkte in einen Punkt W zusammenfallen, so stellen W und die unendlich ferne Gerade der Ebene der vereinigten Felder ein Paar sich involutorisch entsprechender Elemente dar. Einer beliebigen durch W gehenden Richtung entspricht eine ebenfalls durch W gehende Gerade, so daß W der gemeinsame Scheitel zweier projektiver Strahlenbüschel wird. Die beiden Büschel besitzen stets zwei reelle Paare sich entsprechender rechter Winkel; drehen wir nun das eine Feld um W solange, bis die Schenkel jener Winkel sich verkehrt decken, so haben die Felder ein gemeinsames Polardreieck und befinden sich in involutorischer Lage.

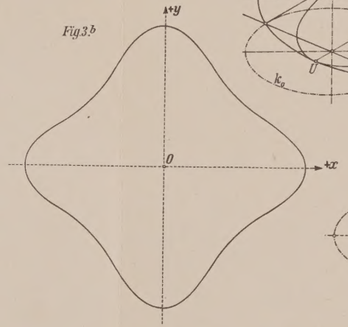
Hieraus folgt umgekehrt, daß jede durch eine Verschiebung und Drehung hervorgegangene Lagenveränderung einer involutorischen Korrelation oder eines Polarfelds zu einer allgemeinen Korrelation führt. Da nun jede Verschiebung mit nachfolgender Drehung durch eine einzige Drehung ersetzbar ist, so ergibt sich daraus, daß die in § 1 behandelte Korrelation allgemeiner Art ist, während die in den folgenden Paragraphen untersuchten Korrelationen Spezialfälle darstellen, insofern entweder die Lagenveränderung oder der Basiskegelschnitt des ursprünglichen Polarfelds Spezialisierungen enthalten.

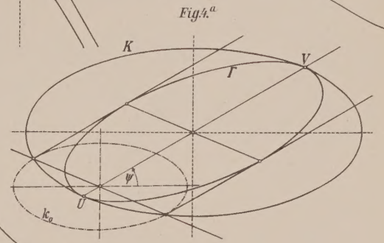
Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer Geheimen Hofrat Herrn Professor Dr. Burmester für die Anregung zur vorliegenden Arbeit und für die freundliche Unterstützung bei der Ausführung derselben meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

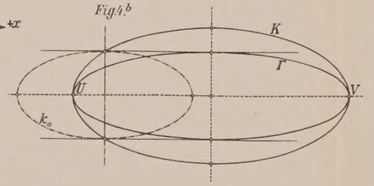


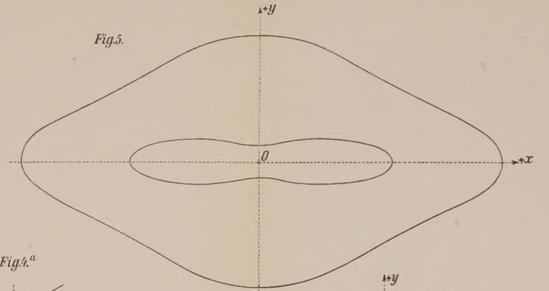


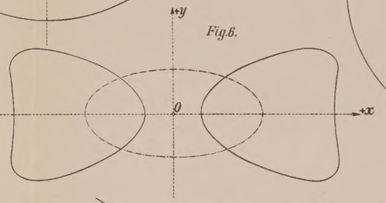


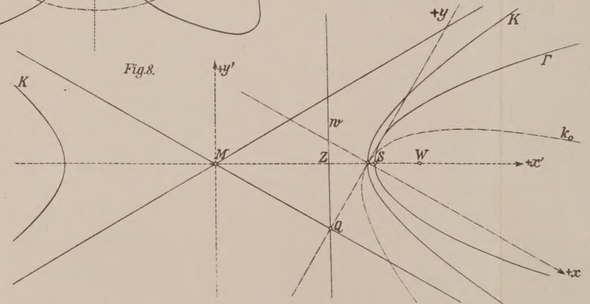


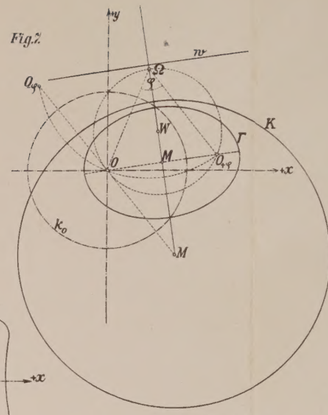


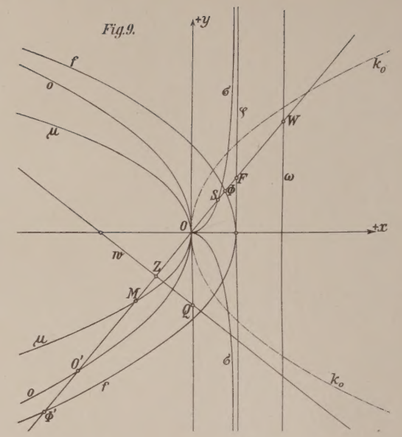


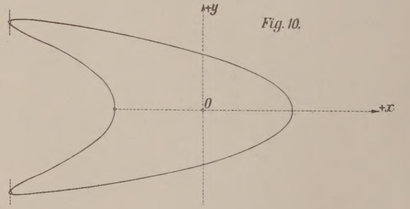












Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München.